Rojas-Gamarra, M., & Stepanova, M. (2015). Sistema de numeración Inka en la Yupana y el Khipu. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. 8(3), 46-68

Artículo recibido el 20 de abril de 2015; Aceptado para publicación el 12 de julio de 2015

Sistema de numeración Inka en la Yupana y el Khipu

The Inka numeration system in the Yupana and Khipu

Milton Rojas-Gamarra[1]
Marina Stepanova[2]

Resumen

Las culturas conforme crecían, necesitaban contar y hacer cálculos, creando para esto sus propios sistemas de numeración y por tanto su propia forma de representar los números; no fue diferente para la cultura Inka. En este artículo, presentamos una hipótesis para el sistema de numeración Inka en la *Yupana* y en el *Khipu*; y su respectiva equivalencia algebraica usando las teorías de sumatorias, matrices y vectores. Por otra parte presentaremos una aplicación para tablet, teléfonos celulares y PC en el que se emula a través del Juego la *Yupana* Inka como aporte a la educación en un acceso digital de las TICs. La motivación que orientó este trabajo fue tratar de recuperar el saber ancestral en lo que respecta a la Matemática Inka para afianzar y/o desarrollar el proceso identitario en el Tawantinsuyo.

Palabras clave: Yupana; Khipu; Taptana; Inka; Etnomatemática; Matemática; TICs.

Abstract

As cultures grow they must count and calculate, in turn creating their own systems of numeration and ways of representing numbers; it was not different in the case of Inka culture. In this paper we formulate a hypothesis about the Inka numeration system in the *Yupana* and *Khipu*, and its respective algebraic equivalence using summation theories, matrices, and vectors. We also present a software based on those algorithms and developed for Android "*Yupana*Inka.apk", which allows one to simulate the mathematical computation of the *Yupana*. This work was motivated by an attempt to recover the ancestral knowledge of Inka mathematics in order to strengthen and/or develop the identity process in Tawantinsuyo.

Keywords: Yupana; Khipu; Taptana; Inka; Ethnomatematical; Mathematics, TICs.

---

[1] Dr. (c) Ciencias de la Educación mención Interculturalidad, Mg. en Ciencia mención Física, Universidad de Santiago de Chile (USACH). Profesor de Física de la Universidad Tecnológica Metropolitana – UTEM. Chile. Investigador Invitado, Departamento de Física, Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco (UNSAAC), Perú. E-mail: mrojasgamarra@gmail.com y milton.rojas@usach.cl

[2] Ph.D. en Física y Matemática, Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile (USACH), Santiago, Chile. E-mail: marina.stepanova@usach.cl

1. YUPANA, TAPTANA Y KHIPU

Al estudiar las *Yupanas* y *Khipus*, nos dimos cuenta que no existe una formulación exacta para la representación de los sistemas de numeración Inka presentes en la *Yupana* y el *Khipu*, y nos preguntamos si era posible construir dichos sistemas de numeración, además, nos cuestionamos si podríamos encontrar una fórmula algebraica única, que transforme los números de la forma que lo representaban los Inkas a la forma que conocemos hoy. Esta fórmula debe incluso hacer el cambio de base. Si bien existen fórmulas para realizar los cambios de base, no existe una para el sistema de numeración Inka y menos si lo representamos en forma de matriz.

En este artículo presentamos una hipótesis para dar los sistemas de numeración Inka en la *Yupana* y el *Khipu. A*demás, encontramos las fórmulas asociadas para transformar del sistema de numeración Inka propuestas al que usamos actualmente. Es decir, transformamos desde un sistema de numeración expresado en un tablero con semillas al Indo-Arábico.

La metodología que usaremos es propia de la investigación cuantitativa en la matemática, en donde usaremos los aparatajes matemáticos de la teoría de sumatorias, matrices y vectores.

Comencemos hablando de los instrumentos que los Inkas utilizaron para hacer sus cálculos matemáticos y llevar buena parte de sus registros.

La *Yupana* y/o *Taptana*, se trata de tableros con escaques o casilleros encontrados en todo el Tawantinsuyo. Según el uso que se le da, toma las denominaciones de *Yupana* o *Taptana*; si se usa para hacer cálculos aritméticos a manera de ábaco, se le llama *Yupana* y si se utiliza como tablero de juego, se denomina *Taptana*.

Hay tableros de hueso, barro (arcilla), madera, y piedra, entre ellos con casilleros en altos y bajo relieve muy pronunciados a los cuales se les llaman Tableros Arqueológicos, también existe otro, de forma plana, en el cual se dibujaron los casilleros, conocido como el Tablero de Guaman Poma de Ayala (Gvaman Poma De Aiala, 1615) (ver fig. 1 y 2). Existen tableros que se usaban a la vez como *Yupana* y *Taptana*, o que en el tiempo cambiaron su uso de *Taptana* 'Juego' a *Yupana* 'cálculo'. Existen tableros de los cuales no se conoce su uso todavía, a éstos nos referiremos como *Yupanas* o *tableros*, por esta razón, cuando estemos seguros que fueron usados para juegos, lo llamaremos *Taptana*.

Cuando se usaban como *Taptana*, al juego se le llamaba Pischqa, se jugaba generalmente con un dado de 5 lados en forma de piramidal, el ganador era llamado Huayra. Pischqa es el Juego, Huayra el punto máximo, el mejor, el que gana (Gonzalez Holguin, 1989). Su hallazgo en algún lugar indicaría la presencia del Imperio Inka en ese lugar (Gentile, 1998).

Tableros Inkas. *Yupana* y/o *Taptana*:

Figura 1. *Arqueológica*

Figura 2. *De Guaman Poma*

Estos *tableros* fueron muy usados en el Tawantinsuyo. Dependiendo del tiempo y el lugar, fueron usados para juegos con motivos rituales ya sea para comunicarse con los Apus, actos funerarios, resolver apuestas (Ordoñez, 2004), entre otras cosas; proponemos también que fueron usados para resolver la jerarquías en Yanantin (paridad complementaria) en algunas posibles situaciones sin claridad en la interacción. Así mismo, fueron usados como herramientas de cálculo a manera de ábaco.

Al tablero de Guaman Poma se le ha dado siempre la interpretación de tablero de cálculo, aunque últimamente apareció una nueva interpretación para dicha *Yupana* y es la de usarlo como calendario (Pascuale, 2012), usando bases combinadas de 40 y 36.

Por otro lado, tenemos al *Khipu* (Ver fig.3). Hay varios tipos de *Khipus*, los que representaban las cantidades, los que contaban historias, las que hacían estadísticas, las que eran calendarios, entre otros.

Figura 3. *Khipu de la Cultura Wari 600 a 1000 d.c. de algodón.* Foto: (Giannoni, 2014)

Varios han tratado de descifrarlos (Burns, 2010), (Urton, 2005), etc. pero ninguno ha llegado a saber todo acerca de los *Khipus*, solamente hay consenso en los *Khipus* que representan números. Éstos se reconocen porque tienen cuerdas en la que se encuentran grupos de nudos con no más de nueve integrantes, además están simétricamente espaciadas, lo cual es útil para detectar el número cero, que se representaba al no atar ningún nudo en el espacio que le correspondía. Claro que existiría una ambigüedad en el caso de que coincida que el último o últimos dígitos (de abajo) de todas las cuerdas sean cero, ya que no habría como saber qué número es completo, a menos que nos fijemos en la longitud total de la cuerda y los espacios que hay entre dígitos, así comparando podríamos saber cuántos ceros faltan. Ahora, podría ocurrir que realmente no existan dígitos por debajo en la cuerda; entonces nos inclinamos a creer que los Inkas debieron tener una manera para soslayar dicha ambigüedad; por ejemplo, atando algún tipo de nudo especial que se diferencie del dígito uno y que represente al cero para dichos casos.

Presentaremos el sistema de numeración y su equivalencia algebraica de éstos *Khipus* que representan números.

Acotaremos que existen muchos otros *Khipus*, con otras características, por ejemplo: grupos de más de nueve nudos, cuerdas principales y secundarias, diferentes colores y materiales, formas de nudos, entre otras. Además, como dijimos, se supone tuvieron muchos usos, no solamente el estadístico o de contabilidad, quizás registraban árboles genealógicos del Ayllu, contaban historias o servirían también para jugar o hacer cálculos, etc. Hay pocos estudios concluyentes al respecto. Existe el llamado Pachakhipu estudiado por Laurencich-Minelli & Magli (2008), quienes encontraron un *Khipu* dibujado dándole la interpretación de calendario para medir el tiempo anual.

Seguiremos profundizando en el tema. En este trabajo comencemos formalizando el sistema de numeración presente en el *Khipu* que está en base decimal.

Sintetizando, la *Yupana* y el *Khipu* fueron los instrumentos que los Inkas han utilizado para hacer sus cálculos. Lo más probable y lógico es pensar que en la *Yupana* se hacían los cálculos aritméticos y los resultados se registraban en los *Khipus*.

Antes de hacer cualquier cálculo aritmético en la *Yupana* o en el *Khipu*, es necesario saber cómo se representaban los números en estos dos instrumentos matemáticos, esto significa saber cómo es el sistema de numeración en ellos. Presentaremos una hipótesis para los dos instrumentos y una representación algebraica equivalente que los describa.

Otras propuestas para sistemas de numeración acotadas se encuentran en (Tun, 2014).

2. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN EN LA *YUPANA* Y EL *KHIPU*

Para dar nuestra explicación de cómo funcionaba la *Yupana* de Guaman Poma, comencemos hablando de los **Sistemas de Numeración** (las culturas necesitaban tener uno propio, para resolver problemas prácticos, por ejemplo: en épocas de sequía repartir el producto de las Qollqas en todo el Imperio, llevar registros de producción, terreno, entre otros usos diferentes) que se define por:

$$\mathrm{N} = (\mathcal{S}, \mathcal{R}) \tag{1}$$

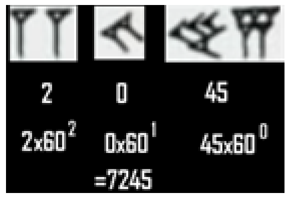
Donde $\mathcal{S}$ es el conjunto de símbolos que se usarán para representar las cantidades, es decir es la base del sistema de numeración:

$$\mathcal{S} = \left\{ s \,/\, s \text{ son los símbolos que represntarán los números} \right\} \tag{2}$$

Y $\mathcal{R}$ es el conjunto de reglas que dicen cómo se construyen los símbolos para representar las cantidades.

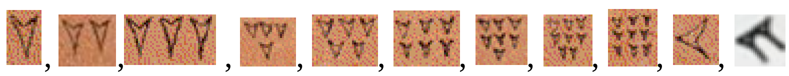
$$R = \left\{ r \,/\, r \text{ son las reglas que se usan para construir los números en que incluso estan las reglas para la suma y multiplicación algebraicas y la base} \right\} \quad (3)$$

Por ejemplo para los antiguos Babilonios, un número estaría dado de la siguiente forma:



El símbolo para cero, fue representado mucho después, no estaba en las primeras representaciones de los números.

Por tanto:

$S = \{$  $\}$

Y las reglas

$$R = \begin{cases} r_1 = \text{Cada cuña representa el uno, la inclinada el cero y la horizontal el diez} \\ r_2 = \text{Se representa separando cada cifra de la otra, usando 11 simbolos. Dos diferentes.} \\ r_3 = \text{Se representa en forma lineal, horizontal, con el numero mas bajo a la izquierda.} \\ r_4 = \text{Se forma multiplicando la cifra por la base en el orden dado y sumando los resultados} \\ r_5 = \text{La base que toma es única y es sexagesimal (60)} \end{cases}$$

Vemos que necesariamente un sistema que va a representar números, es porque reglamenta la forma de sumar y multiplicar.

Podemos encontrar más ejemplos de sistemas de numeración de otras civilizaciones en Casado (2015) y Porta (2015).

Para el sistema de numeración Inka tendremos 2 formas para representar los números, una para representar las soluciones (en el *Khipu*) y otra para trabajarlos (en la *Yupana*):

En el *Khipu* el sistema de numeración sería $N_{Inka_K} = (S_K, R_K) \quad (hoq)$, donde S_K es la BASE:

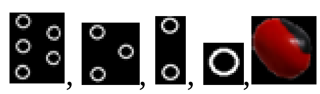
$$S_K = \{$$  $$\} \quad (4)$$

Y R_Y está dada por las reglas:

$$R_K = \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \text{Cada dígito se compone de un conjunto de nudos seguidos o el sin nudo.} \\ r_2 = \text{Cada nudo representa una unidad, la ausencia el cero, aunque nos inclinamos a creer} \\ \quad \text{que e algunas situaciones de ambiguedad, quiza pusieron algun tipo de nudo especial} \\ r_3 = \text{La base es binaria si se toma en cuenta las dos formas básicas (nudo y sin nudo) y} \\ \quad \text{decimal si se toma en cuenta grupos de nudos (nueve) y el espacio sin nudo.} \\ r_4 = \text{Se representa en forma lineal vertical comenzando con el dígito de menor valor} \\ \quad \text{posicional en la parte inferior y yendo hacia arriba.} \\ r_5 = \text{Para transformarlo se multiplica cada dígito (cifra) por la base en el orden dado y} \\ \quad \text{se suma los resultados} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Los *Khipus* serían la escritura numérica del imperio Inka.

El otro sistema de numeración está presente en la *Yupana*, y está dado por: $N_{Inka_Y} = (S_Y, R_Y) \quad (isqay)$, donde el primer elemento S_Y es la BASE:

$$S_Y = \{$$  $$\} \quad (6)$$

Y R_Y es el conjunto de reglas:

$$R_Y = \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \text{Cada circunferencia representa una unidad en el casillero.} \\ r_2 = \text{Son 5 simbolos que se usan. y solo dos básicos, una circunferencia y una semilla. Por el} \\ \quad \text{contrario de todas las demas culturas, usa los 4 primeros numeros primos. La ausencia} \\ \quad \text{de granos en el casillero representa el cero, pero no hay ambigüedad de representación} \\ \quad \text{de números grandes porque es posicional y la posición la da el casillero en el Tablero.} \\ r_3 = \text{Cada dígito se compone de un casillero más sus semillas y ocupan una posición bidimensional.} \\ r_4 = \text{Los casilleros tienen el valor del número de circunferencias dibujados en él, multiplicado} \\ \quad \text{por la base elevado a la fila a la que pertenece menos uno, comenzando de abajo hacia} \\ \quad \text{arriba. Si hay numeros decimales, se forman hacia abajo, poniendo una linea de referencia} \\ r_5 = \text{Cada semilla que se ponga tiene el valor del casillero a la que se ponga.} \\ r_6 = \text{El número final se forma sumando los valores de todas las semillas. Es decir primero} \\ \quad \text{multiplicando el número de semillas que esta en el casillero por el valor del casillero y} \\ \quad \text{luego sumando todos los resultados.} \\ r_7 = \text{Cada fila representará un digito del número actual y al final de todos los cálculos, no debe} \\ \quad \text{haber más de 3 semillas y preferentemente en casilleros distintos. En medio del} \\ \quad \text{cálculo, nada me impide poner mas semillas como el valor que diga cada casillero.} \\ r_8 = \text{La base, según resultado es 10. Según formas Básicas es 2(circunferencia+semilla) y} \\ \quad \text{5 (casilleros+semilla). Entonces el sistema es decimal, binario y quinario.} \end{array} \right\} \tag{7}$$

En la *Yupana* se hacían los cálculos y en el *Khipu* se "escribía" los resultados. Como hasta ahora no ha aparecido ningún documento u objeto arqueológico que diga cómo realmente se ha usado la *Yupana* entonces hay varias hipótesis. La hipótesis que dimos, es una más, que a nuestro entender es la más lógica, por la sencillez con que veremos se hacen los cálculos. Pero es importante para nuestra cultura seguir buscando más hipótesis.

Aclaremos que los Inkas en estos sistemas de numeración, no usaron la forma indo-arábiga para representar gráficamente los números, pero hicieron sus cálculos. Nos dicen varios cronistas como Garcilaso, Guaman Poma y otros, que los Quipucamayoq (calculistas Inkas) eran mucho más rápidos y eficaces que los invasores llegados desde el otro lado del Atlántico.

Otra situación que podemos notar es que para representar cualquier número real, no se toman todos los nueve dígitos que usualmente se toman en el sistema decimal. Y más interesante es darnos cuenta que son justo los números primos. Ambos sistemas de numeración son posicionales. En la *Yupana* el sistema es Binario (si se toma en cuenta circunferencia más semilla), quinario (si se toma en cuenta los 4 casilleros más la semilla) y decimal (si se toma en cuenta combinaciones de casilleros con semillas).

El diseño del tablero no pudo ser de otra manera, porque el número de casilleros con sus circunferencias (5, 3, 2 y 1) que eligieron para cada fila son ideales, puesto que si disminuyen los casilleros, incluidas sus circunferencias, el número de semillas que se usarían para representar los números aumentarían y los cálculos se harían engorrosos; y en caso contrario, si se aumentan los casilleros incluidas sus circunferencias, aunque el número de semillas disminuiría, para hacer los cálculos habría que aprender las tablas de multiplicación y existirían muchas maneras de representar un solo número. No necesitamos el casillero con cuatro circunferencias, porque se puede representar con dos semillas en el casillero de dos circunferencias, o también con una semilla en el casillero con una circunferencia y otra en el de tres. Este tablero Inka según nuestro punto de vista es ideal.

Luego que hemos explicado cómo se forman los números en la *Yupana* y el *Khipu*, encontraremos y formalizaremos el equivalente algebraico con las expresiones matemáticas que hoy en día conocemos. Nos servirán las teorías de las sumatorias, las matrices y los vectores.

3. EQUIVALENCIA ALGEBRAICA PARA LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN INKA

Hay muchas propuestas para formar los números en la *Yupana* de Guaman Poma, allí tenemos a Henry Wassen (1931), Nicolino de Pascuale (2001), Radicati di Primeglio (1979), Cinzia Florio (2008), William Burns (1981), Leonard y Shakiban (2010), entre otros, pero ninguno ha formalizado con una expresión algebraica equivalente sus propuestas, nosotros lo haremos en este artículo.

Todas éstas propuestas son interesantes y de gran aporte, pero la que mejor nos parece desde una perspectiva lógica, lúdica y práctica, es que a cada semilla que se ponga a cada casillero, se le debe multiplicar por el valor que se indica dicho casillero. Esto también asume Nicolino de Pascuale. Aunque trabajamos separadamente y tengamos algunas diferencias en la forma de explicar cómo se realizan los cálculos aritméticos en la *Yupana* incluyendo la formalización, básicamente coincidimos con la interpretación de los valores que ponemos a las semillas que ocupan cada casillero. Nicolino tiene otra forma de interpretar la *Yupana* de Guaman Poma, propone dos bases de numeración y con ello la *Yupana* de Guaman Poma se convierte en calendario (Pascuale, 2012).

Al hacer un análisis de la *Yupana*, encontramos que la mejor forma de interpretar la *Yupana* es haciendo que cada semilla que se pone en el casillero debe estar multiplicado por el valor del mismo, esto lo hicimos teniendo en mente que una teoría numérica de cálculo perdura en el tiempo y desplaza a otras, cuando cumple dos condiciones: primero que sea lo más sencillo posible y segundo que sea lo más general posible. Es así que por ejemplo la forma de hacer aritmética con números Indo-Arábicos quedo en vez de la Romana aun cuando los calculistas Romanos hicieron todo lo posible para eliminar el nuevo sistema, ya que decían solo los poseídos por demonios podían hacer los cálculos tan rápida y fácilmente, comparado con la dificultad y el tiempo con que ellos lo hacían.

Según esto hemos asumido que toda semilla que se ponga a cada casillero, se le debe multiplicar por el valor que indica dicho casillero. Así tenemos la ventaja de que no se usa muchas semillas, sino serían insulsos los valores que se dieron a cada casillero. A diferencia de Nicolino, quien dice que se puede usar indistintamente la *Yupana* en base 40 y 36 (Pascuale, 2012) nosotros proponemos que para escribir los resultados solamente se debe usar en base 10. Otra cosa es que en medio del cálculo cada fila pueda tener un valor de 39 usando todos los puntitos, pero para cuando tenemos resultados, los expresaremos siempre en base 10, además en medio del cálculo nada nos impide tener valores mayores a 40. Trabajar en base 36 o 40 es mucho más difícil que hacerlo en la base 10, incluso según las crónicas la base que se usó para contar los días de sus semanas, fue de 10.

Para expresar los dígitos de los números debemos multiplicar por la base 10 elevado a la fila menos uno comenzando desde abajo. La *Yupana* lo veremos tal cual está en el dibujo de Guaman Poma (Fig.2), sin hacer ningún giro.

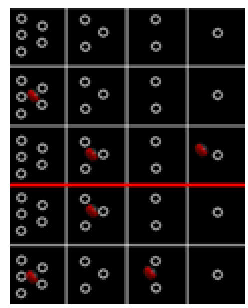
Primeramente veamos qué nos dice la regla general para formar los números que son posicionales en cualquier base, con n dígitos en la parte entera y m dígitos en la parte decimal:

$$\mathrm{N} = \overline{d_{n-1} \ldots d_0 d_1 . d_{-1} \ldots d_{-m}} = \sum_{i=-m}^{n} d_i b^i \tag{8}$$

Debemos aclarar que esto es para el caso de los números que se forman linealmente. Para nuestro caso en que usamos un casillero de un tablero que está en dos dimensiones y que además se le tiene que incorporar semillas, tendremos que crear una forma equivalente para formar el número.

Como nuestro número está representado en un tablero bidimensional, nos ayudaremos de las matrices para representar nuestro número, mostrando así que hay otra manera de representar un número que también es posicional.

$$\begin{pmatrix} a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & a_{(n-1)4} \\ \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{-11} & a_{-12} & a_{-13} & a_{-14} \\ a_{-21} & a_{-22} & a_{-23} & a_{-24} \\ \\ a_{-m1} & a_{-m2} & a_{-m3} & a_{-m4} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} A_{(n-1)1} & A_{(n-1)2} & A_{(n-1)3} & A_{(n-1)4} \\ \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} \\ A_{-11} & A_{-12} & A_{-13} & A_{-14} \\ A_{-21} & A_{-22} & A_{-23} & A_{-24} \\ \\ A_{-m1} & A_{-m2} & A_{-m3} & A_{-m4} \end{pmatrix} \quad =$$



(9.a) (9.b) (9.c)

Los casilleros lo representaremos con los elementos de una matriz. Al número de semillas que se ponga en cada casillero por a_{ij} y a su producto del número de semillas por el valor del casillero (5, 3, 2 ó 1) por A_{ij} (los definimos formalmente más adelante). Así (9.a) o también (9.b) representarán a (9.c).

En las Matrices (9.a) y (9.b), adaptamos los subíndices al orden como se presenta en la *Yupana*, en el que hemos incluido, para generalizar aún más el número, los decimales; no sabemos, por ahora si los Inkas usaron los decimales, pero con la *Yupana* se puede trabajar normalmente, solo hay que imaginarse una línea horizontal de la *Yupana* que divida a los números enteros por encima y los decimales por debajo. Por tanto el número lo podremos representar como:

$$N_{\Sigma}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(a_{i1}5+a_{i2}3+a_{i3}2+a_{i4}1\right)10^{i}+\sum_{i=-m}^{-1}\left(a_{i1}5+a_{i2}3+a_{i3}2+a_{i4}1\right)10^{i} \qquad (10)$$

Donde el primer sumando representa la parte entera del número y el segundo la parte decimal. En el primer sumando $i+1$ indica la fila donde está la semilla y en el segundo sumando i indica la fila (debajo de la línea de referencia) que se encuentra la semilla.

Expresando en una sola sumatoria la expresión (10), se tiene:

$$N_{\Sigma}=\sum_{i=-m}^{n-1}\left(a_{i1}5+a_{i2}3+a_{i3}2+a_{i4}1\right)10^{i} \qquad (11)$$

Sea:

$$a_{i1}5=A_{i1}, \quad a_{i2}3=A_{i2}, \quad a_{i3}2=A_{i3} \quad \text{y} \quad a_{i4}1=A_{i4} \qquad (12)$$

y la base $b=10$. Entonces:

$$N_{\Sigma}=\sum_{i=-m}^{n-1}\left(A_{i1}+A_{i2}+A_{i3}+A_{i4}\right)b^{i} \qquad (13)$$

O que es lo mismo:

$$N_{\Sigma}=\sum_{i=-m}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{4}A_{ij}\right)b^{i} \qquad (14)$$

Dónde: n representa el número de dígitos enteros (número de filas por encima de la de referencia), m representa el número de dígitos decimales (número de filas que se usa por debajo de la fila horizontal de referencia que separa los enteros de los decimales), y j representa la columna en la que está el número representado por A, e i tiene que ver con la fila.

El número N_{Σ} dado en la ec.(14) es una representación Algebraica, una abstracción, de la forma de representar un número en la *Yupana* y la llamaremos "**Representación en**

sumatoria del Número Inka en la *Yupana*”. Con ésta representación podremos explicar en forma generalizada la forma de operar los números en el Antiguo Tawantinsuyo.
El desarrollo de la sumatoria, nos dará la forma tradicional Indo-Arábica de representar los números y podrá ser escrito con nudos en los Khipus.

Podemos simplificar un poco más esta expresión y llegar a una representación más compacta. Para esto usaremos la Teoría de Matrices y Vectores.
Llamemos “**Número Matricial Binario en la *Yupana***” a la Matriz M_{Υ} cuyos elementos son a_{ij} que representan el número de semillas de cada casillero (lo llamamos así, porque aun cuando en medio de cualquier cálculo sus elementos no sean binarios, cuando se aplican las reglas para formar el número en la *Yupana*, ec.(7), éstos números, al final, se convertirán a ceros y unos).

$$M_{\Upsilon} \equiv \begin{bmatrix} a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & a_{(n-1)4} \\ \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{01} & a_{12} & a_{03} & a_{04} \\ a_{-11} & a_{-12} & a_{-13} & a_{-14} \\ a_{-21} & a_{-22} & a_{-23} & a_{-24} \\ \\ a_{-m1} & a_{-m2} & a_{-m3} & a_{-m4} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Y M_{γ} a la matriz cuyos elementos A_{ij} son la multiplicación del número de semillas en cada casillero por el valor del mismo, es decir, están dadas por las ecuaciones (12).

$$M_{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} A_{(n-1)1} & A_{(n-1)2} & A_{(n-1)3} & A_{(n-1)4} \\ \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} \\ A_{-11} & A_{-12} & A_{-13} & A_{-14} \\ A_{-21} & A_{-22} & A_{-23} & A_{-24} \\ \\ A_{-m1} & A_{-m2} & A_{-m3} & A_{-m4} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Notemos que con las reglas que dimos para formar los números finales (después de reducirlos) en la *Yupana* en las ecuaciones (1), (6) y (7), los a_{ij} tomaran valores de cero y uno solamente y además varios A_{ij} serán cero. Los valores A_{ij} que tendremos en cada casillero coincidirán exactamente a los valores de cada casillero en la *Yupana* en el que ya están presentes las semillas, representando ya el número en la *Yupana*, por tal motivo a la matriz M_{Y} le llamaremos el '**Número Matricial Inka en la *Yupana***'

Definamos ahora tres matrices, una matriz columna Υ y otras dos matrices Diagonales T_{Υ} y T_{Υ}^{I} cuyos elementos son los valores de cada casillero de la *Yupana*, es decir 5, 3, 2 y 1.

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17.a) \qquad T_{\Upsilon} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (17.b) \qquad T_{\Upsilon}^{I} \equiv \begin{pmatrix} 5^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^{-1} \end{pmatrix} (17.c)$$

A la cual la llamaremos la Matriz: '**Base de *Yupana***', '**Transformada(dora) de *Yupana***' y '**Transformada(dora) Inversa de *Yupana***' respectivamente.

Notemos que debido a la multiplicación usual de matrices:

$$\mathrm{M}_{Y} = \mathrm{M}_{\Upsilon} T_{\Upsilon} \tag{18}$$

$$\mathrm{M}_{\Upsilon} = \mathrm{M}_{Y} T_{\Upsilon}^{I} \tag{19}$$

M_{Y} es la transformada de M_{Υ} y M_{Υ} es la transformada Inversa de M_{Y}.

Ahora si multiplicamos $\mathrm{M}_{\Upsilon}\Upsilon$ nos dará otra matriz columna $(n+m)\times 1$ cuyos valores serán justamente los dígitos del número escrito de arriba hacia abajo y tal cual se presenta el número en el *Khipu*, por tal motivo a la matriz M_{K} llamaremos el '**Número Matricial Inka en el *Khipu***' y estará dado por:

$$M_K \equiv M_\Upsilon \Upsilon = \begin{pmatrix} a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & a_{(n-1)4} \\ & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{-11} & a_{-12} & a_{-13} & a_{-14} \\ a_{-21} & a_{-22} & a_{-23} & a_{-24} \\ & & & \\ a_{-m1} & a_{-m2} & a_{-m3} & a_{-m4} \end{pmatrix}_{(n+m)\times 4} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{4\times 1} \equiv \begin{pmatrix} K_{(n-1)1} \\ \\ K_{11} \\ K_{01} \\ K_{-11} \\ K_{-21} \\ \\ K_{-m1} \end{pmatrix}_{(n+m)\times 1} \qquad (20)$$

Aquí:

$$K_{i1} = a_{i1}\times 5 + a_{i2}\times 3 + a_{i3}\times 2 + a_{i4}\times 1 \qquad \text{con} \qquad i = (n-1) \quad \ldots \quad -m \qquad (21)$$

Vemos que los números que manejaron los Inkas, tienen su representación geométrica más exacta en matrices.

Pero debemos encontrar una forma matemática exacta de transformar estas matrices a la representación numérica Indo-Arábica que hoy en día conocemos, es decir presentarlos como un arreglo horizontal de números donde las unidades van a la derecha, luego las decenas, etc. para esto nos valemos de la teoría matricial y vectorial. El encontrar una forma exacta matemática de transformar la matriz al número como lo conocemos, nos servirá para poder hacer programas digitales que simulen cálculos en la *Yupana*.

Para hacer la transformación, primeramente usamos la matriz al cual llamamos el 'número Inka en el *Khipu*' dada en la ecuación (18), al cual le hallamos la transpuesta, teniendo así:

$$M_K^T = \left(K_{(n-1)1} \ \ldots \ K_{11} \ K_{01} \ K_{-11} \ K_{-21} \ \ldots \ K_{-m1} \right)_{1\times(n+m)} \qquad (22)$$

A ésta matriz debemos aplicar una función biyectiva tal que transforme la matriz fila a un vector, teniendo así:

$$\overrightarrow{M_K^T} = \left(K_{(n-1)1}, \ldots, K_{11}, K_{01}, K_{-11}, K_{-21}, \ldots, K_{-m1} \right) \qquad (23)$$

Luego debemos definir un vector al cual llamaremos el **'vector base'** $\vec{b}$ definido por:

$$\vec{b} = \left(b^{n-1},\ldots,b^{1},b^{0},b^{-1},b^{-2},\ldots,b^{-m}\right) \tag{24}$$

Multiplicando escalarmente los vectores $\overrightarrow{\mathrm{M}_{K}^{T}}$ y $\vec{b}$, tendremos el resultado esperado:

$$\mathrm{N}_{Inka} = \overrightarrow{\mathrm{M}_{K}^{T}} \cdot \vec{b} \tag{25}$$

Al cual le llamaremos el '**Número Inka**' que es la representación algebraica equivalente para la *Yupana* y el *Khipu* indistintamente.

Gracias a la ecuación para el Número Inka (ec. (25)), podemos llegar desde cualquier representación Matricial (ecuaciones (16) y (15)) del Número Inka hacia el Número Indo-Arábico tal cual lo conocemos hoy, para lo cual se usan las ecuaciones (19), (20) y (25).

Hemos representado con $\mathbf{N}$ (ec.(8) con $b=10$) al número en la forma tradicional Indo-Arábica; con N_{Σ} al número Inka en la *Yupana* en su forma de sumatoria (ec.(14)); y con N_{Inka} al Número Inka en general, ya que engloba al Número Inka en el *Khipu*, al Número Matricial Binario en la *Yupana* y al Número Matricial en la *Yupana* (ec.(25)). Pero que al final, cuando desarrollamos N_{Σ} y N_{Inka}, desde ambas expresiones podremos llegar al número $\mathbf{N}$ tal cual lo conocemos ahora, es decir:

$$\mathrm{N}_{\Sigma} = \mathrm{N}_{Inka} = \mathbf{N} \tag{26}$$

Antes de aplicar nuestras ecuaciones para expresar y transformar los números en la *Yupana* y el *Khipu*, presentaremos una primera versión de un programa que podrá ser usado en PC, tablet y celulares y que emula una *Yupana*, en el que se pueden representar los números e incluso hacer los cálculos, tal como lo hacían nuestros antepasados los Inkas.

4. EL PROGRAMA DE LA YUPANA INKA (PARA PC, TABLET Y CELULARES)

Los Inkas aprendían las operaciones básicas usando la *Yupana* y las semillas. El que quería hacer esto tenía que llevar estas dos cosas para todo lado, en especial el Quipuqamayoq.

Figura 4.a. *Presentación del Juego*

Figura4.b. *El Menú del Juego*

Figura 4.c. *La Yupana Inka incluido las semillas*

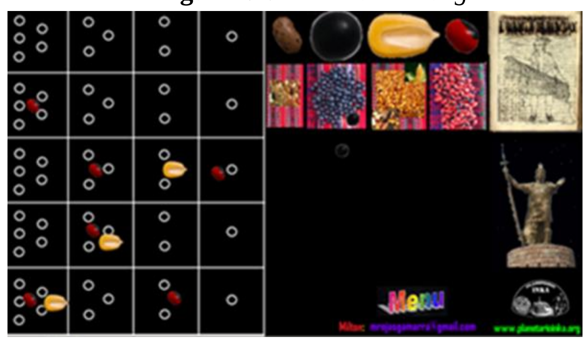


Figura 4.d. *Los números 5437 con huairuros y 235 con Maíces*

En la actualidad para que nuestros niños y jóvenes puedan hacer lo mismo usando la tecnología que hoy en día se usa, creamos un programa para teléfonos celulares, tablet y PC que simula la *Yupana* Inka. Este software cumplirá varias funciones agregadas. Al usarlo, no solamente se revivirán los tiempos Inkas, sino que servirá al proceso identitario, didáctica, creatividad, se le pueden inventar más funciones, se podrá aprender las matemáticas jugando al igual que lo hacían los Inkas. Jugar fue la herramienta más poderosa que tenían los Inkas para la educación en todo el Tawantinsuyo.

En la Fig. 4.a esta la presentación del juego donde se ponen dos link, una para ir al menú del juego, otra para salir del juego (Tuquy). En la Fig. 4.b se presenta el menú del juego con cuatro botones, una para regresar a la casa (Wasi) es decir para regresar a la presentación del juego, otra para jugar (Puqllay), otra para ir al manual del juego y otra para salir del juego. En la Fig. 4.c se presenta la *Yupana* en sí, es decir el tablero con las semillas (de derecha a izquierda el huayruro, el maíz, el chucho y el poroto). Las semillas están en

Lliqllas (mantas) y es posible sacarlas y deslizarlas al tablero. Usando la e.c(6) y las reglas dadas en la ec.(7) que nos dicen cómo se escriben y forman los números en la *Yupana*, en la Fig. 4.d representamos los números 5437 y 235. Como se aprecia el juego está en tres idiomas (quechua, inglés y castellano) en la que se ha privilegiado el quechua.

5. UN EJEMPLO

En esta sección daremos un ejemplo usando *"la escritura de un número en la Yupana y el Khipu"* Tal como lo vieron los Inkas, su representación en sumatoria *"Representación en Sumatoria del Número Inka en la Yupana"*, su representación matricial "*Número Inka en la Yupana y el Khipu"*, y su expresión final "*Número Inka"*. También presentaremos formalmente cómo transformamos el número Inka desde la *Yupana* pasando por el *Khipu* hasta llegar a la forma actual Indo-Arábica.

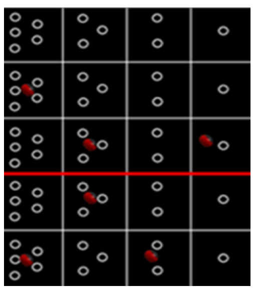


Figura 5.a *El número 5437 en la Yupana*

Figura 5.b *El números 5437 en el Khipu*

Representación en sumatoria del Número Inka en la Yupana: Gracias a la ec.(14)

Representemos en la *Yupana* y el *Khipu* el número 54.37 (repetimos, no sabemos, por ahora, si los Inkas usaron decimales, pero en la *Yupana* se puede trabajar con ellos sin ningún problema, la única diferencia es pensar que existe una línea decimal en vez de un punto decimal. Comparar la Figura 4.d con la 5.a).

En la *Yupana* para el número 54.37, la línea decimal estará en la segunda fila comenzando de abajo y en el *Khipu* por encima del segundo grupo de nudos comenzando de abajo. En la Fig.5.a y 5.b lo tenemos tal como lo verían los Inkas.

$$\mathrm{N}_{\Sigma} = \sum_{i=-m}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{4} A_{ij}\right)b^{i} = \sum_{i=-2}^{2-1}\left(\sum_{j=1}^{4} A_{ij}\right)10^{i} = \sum_{i=-2}^{1}\left(A_{i1}+A_{i2}+A_{i3}+A_{i4}\right)10^{i}$$
$$=\left(A_{-21}+A_{-22}+A_{-23}+A_{-24}\right)10^{-2}+\left(A_{-11}+A_{-12}+A_{-13}+A_{-14}\right)10^{-1}+$$
$$\left(A_{01}+A_{02}+A_{03}+A_{04}\right)10^{0}+\left(A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}\right)10^{1}$$

Ordenando los sumandos para que correspondan los casilleros en la forma usada por los Inkas en la *Yupana* y remplazando con los valores de los casilleros tendremos:

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{\Sigma} = {} & \left(A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}\right)10^{1}+\\ & \left(A_{01}+A_{02}+A_{03}+A_{04}\right)10^{0}+\\ & \left(A_{-11}+A_{-12}+A_{-13}+A_{-14}\right)10^{-1}+\\ & \left(A_{-21}+A_{-22}+A_{-23}+A_{-24}\right)10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{\Sigma} = {} & \left(a_{11}\times 5+a_{12}\times 3+a_{13}\times 2+a_{14}\times 1\right)10^{1}+\\ & \left(a_{01}\times 5+a_{02}\times 3+a_{03}\times 2+a_{04}\times 1\right)10^{0}+\\ & \left(a_{-11}\times 5+a_{-12}\times 3+a_{-13}\times 2+a_{-14}\times 1\right)10^{-1}+\\ & \left(a_{-21}\times 5+a_{-22}\times 3+a_{-23}\times 2+a_{-24}\times 1\right)10^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{\Sigma} = {} & \left(1\times 5+0\times 3+0\times 2+0\times 1\right)10^{1}+\\ & \left(0\times 5+1\times 3+0\times 2+1\times 1\right)10^{0}+\\ & \left(0\times 5+1\times 3+0\times 2+0\times 1\right)10^{-1}+\\ & \left(1\times 5+0\times 3+1\times 2+0\times 1\right)10^{-2}\end{aligned}$$

Resolviendo: $$\mathrm{N}_{\Sigma} = (5)10^{1}+(4)10^{0}+(3)10^{-1}+(7)10^{-2} = 54.37$$

Ponemos en ésta forma, para que el lector compare con lo que ocurre en la *Yupana*.

Número Matricial Inka en la Yupana: Lo da la ecuación (16), aplicado a nuestro ejemplo:

$$\mathrm{M}_{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} \\ A_{-11} & A_{-12} & A_{-13} & A_{-14} \\ A_{-21} & A_{-22} & A_{-23} & A_{-24} \end{bmatrix}_{(2+2)\times 4} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{(2+2)\times 4}$$

Número Matricial Inka en el Khipu: Lo da la ecuación (20), aplicado a nuestro ejemplo:

$$\mathrm{M}_{K} \equiv \mathrm{M}_{\Upsilon}\Upsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(2+2)\times 4} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}_{(2+2)\times 1}$$

Número Inka: Lo da la ecuación (25), aplicado a nuestro ejemplo (n=2 y m =2).

$$\mathrm{N}_{Inka} \equiv \overrightarrow{\mathrm{M}_{K}^{T}} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{01} \\ K_{-11} \\ K_{-21} \end{pmatrix}_{(n+m)4\times 1}^{T}} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}_{4\times 1}^{T}} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{1\times 4}} \cdot \vec{b} = (5,4,3,7) \cdot \left(b^{1}, b^{0}, b^{-1}, b^{-2}\right)$$

En la que se sacó la transpuesta y se aplicó la función biyectiva, la cual la representamos con la flecha del vector, esto por comodidad y porque el resultado será un vector (en este número n=2 y m =1).

Y por último multiplicando escalarmente por el vector base, tenemos:

$$\mathrm{N}_{Inka} = (5,4,3,7) \cdot \left(10^{1}, 10^{0}, 10^{-1}, 10^{-2}\right) = 50 + 4 + 0.3 + 0.07 = 54.37$$

llegamos así al número tal cual como lo conocemos.

6. RESULTADOS

Recordemos que un sistema de numeración indica cómo se escriben los números, en ese sentido hemos "*escrito*" los números Inkas tanto en la *Yupana* y el *Khipu*, como se observan en las Figuras 5.a y 5.b. Por lo tanto:

Resultado 1. La Fig. 5.a es un ejemplo de la escritura del Número Inka en la Yupana.

Resultado 2. La Fig. 5.b es un ejemplo de la escritura del Número Inka en el Khipu.

Por otro lado la BASE indica cuantas grafías se usan como mínimo para expresar todos los números. Por lo tanto:

Resultado 3. La Base para escribir el número Inka en la Yupana es el 5 y está dado por el conjunto de símbolos dado el la ecuación (6). Si se toma en cuenta el Número de grafías (circunferencias y semillas), la Base es 2. La Base para el Número Matricial Binario en la

Yupana es el 2.Y si se toma en cuenta la lectura del resultado, la cual se llevará al Khipu, la base es 10.

Resultado 4. La Base para escribir el número Inka en el Khipu es el 10 y está dado por el conjunto de símbolos dado en la ecuación (4). Si tomamos en cuenta el Nudo y Sin Nudo, la base sería 2.

Los sistemas de numeración:

Resultado 5. El Sistema de numeración en la Yupana es $\mathrm{N}_{Inka_Y} = \left(S_Y, R_Y\right)$ donde S_Y y R_Y están dados por las ecuaciones (6) y (7) respectivamente.

Resultado 6. El Sistema de numeración en el Khipu es $\mathrm{N}_{Inka_K} = \left(S_K, R_K\right)$ donde S_K y R_K están dados por las ecuaciones (4) y (5) respectivamente.

Las Representaciones equivalentes:

Resultado 7. La representación en sumatoria del número Inka en la Yupana está dada por la ecuación (14).

Resultado 8. La representación en una matriz con elementos Binarios del Número Inka en la Yupana al cual llamamos el Número Matricial Binario Inka en la Yupana, está dado por la ecuación (15).

Resultado 9. La representación Matricial del número Inka en la Yupana al cual llamamos El Número Matricial Inka en la Yupana, está dada por la ecuación (16).

Resultado 10. La representación Matricial del número Inka en el Khipu al cual llamamos El Número Matricial Inka en la Khipu, está dada por la ecuación (20).

Las transformaciones: (de Base)

Resultado 11. La expresión que transforma desde la representación en sumatoria del Número Inka en la Yupana al Número Indo-Arábico tal cual lo conocemos hoy es la ecuación (14).

Resultado 12. La expresión que hace el cambio de Base desde cualquier representación Matricial del Número Inka en la Yupana, pasando por la representación Matricial del número Inka en el Khipu y llegando a la representación Indo-Arábica del número tal cual como hoy lo conocemos, es la ecuación (25). En ésta expresión a N_{Inka} le hemos llamado el Número Inka.

Recursos y Aplicaciones

Resultado 13. Un programa que emula la Yupana y en el cual se puede representar el número Inka en la Yupana usando diferentes semillas y en el que se podrá realizar las diferentes operaciones y cálculos matemáticos.

7. CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado una hipótesis, según nuestro punto de vista, la más lógica de cómo debió ser el sistema de numeración que usaron los Inkas en la *Yupana* y el *Khipu*.

Hallamos una representación en sumatoria para el número Inka en la *Yupana*, ec.(14).

Encontramos una representación matricial para cada instrumento, a las cuales le llamamos el Número Matricial Inka en la *Yupana* y el *Khipu*, ec.(16) y ec.(20) respectivamente.

Usando las teorías de matrices y vectores, hemos encontrado una forma algebraica compacta, al cual llamamos Número Inka ec.(25), vale tanto para la *Yupana* como para el *Khipu*, ya que este número sale a partir de trabajar la *Yupana* y luego el *Khipu*, incluso se respeta el orden, recordemos que los Quipuqamayoq hacían primero sus cálculos en la *Yupana*, y sus resultados lo expresaban en el *Khipu*. El desarrollo algebraico del Número Inka nos da exactamente el número tal cual lo conocemos.

Hemos desarrollado un programa que simula el manejo de la *Yupana* Inka, el tablero y las semillas, y que pueden ejecutarse tanto en PC, celulares y tablet. Ayudando así a la didáctica de la matemática y a un proceso identitario.

La forma de cómo se hacen las operaciones básicas usando las expresiones algebraicas equivalentes encontradas en este artículo, ocuparon mucho más espacio y decidimos explicarlos en un nuevo artículo.

REFERENCIAS

Burns, G. W. (1981). La Tabla de Cálculo de los Incas. *Boletin de Lima. 3(11),* 1-15.

Burns, G. W. (2010). *El Mundo de los Amautas.* Lima: Universidad Alas Peruanas.

Casado, S. (2015). *Los sistemas de numeracion a lo largo de la historia* . Recuperado de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/sistnum.html

Florio, C. (2008). *Encuentros y Desencuentros en la identificación de una relación matemática en la yupana de Guaman Poma de Ayala.* Recuperado de https://www.academia.edu/3989534/Decifrata_la_yupana_di_Guaman_Poma_versione_in_spagnolo.

Gentile, M. (1998). La Pichca: oraculo y juego de fortuna (Su persistencia en el espacio y tiempos andinos). *Bulletin de l'Institut français d'études andines*, 27(1), 75-131.

Giannoni, D. (2014). Fotografia de *Khipu* cultura Wari. *Fundación Museo Amano*. Lima, Perú. Recuperado de http://nga.gov.au/exhibition/Incas/Default.cfm?IRN=227101&BioArtistIRN=41379&MnuID=3&GalID=7&ViewID=2

Gonzalez Holguin, D. (1989). *Vocabvlario de la lengva general de todo el perv llamada Lengua QQuichua o del Inca.* Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Gvaman Poma De Aiala, P. (1615). *El primer nveva corónica i bven gobierno*. Recuperado de http://www.kb.dk/permalink/2006/poma/362/en/text

Laurencich-Minelli, L., & Magli, G. (2008). *A calendar Quipu of the early 17th century and its relationship with the Inca astronomy.* Recuperado de http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0801/0801.1577.pdf

Leonard, M., & Shakiban, C. (2010). *The Incan Abacus: A Curious Counting Device.* Recuperado el 08 de 04 de 2015, de http://www.etnomatematica.org/home/?page_id=110.

Ordoñez, S. (2004). *El juego del huayru o pishca - Una aproximación a la reestructuración del cambio y la muerte en los Andes*. (Trabajo de maestría, no publicado). Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales. FLACSO, Quito-Ecuador.

Pascuale, N. D. (2012). *El imperio recuperado.* Recuperado de http://www.quipus.it/elimperiorecuperado.pdf

Porta, B. A. M. (2015). *Sistemas y Bases de Numeración.* Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/Ana_Bressan_Sistemas_y_Bases_de_Numeracion.pdf

Radicati Di Primeglio, C. (1979). *El sistema contable de los Incas: yupana y quipu.* Lima, Perú: Editorial Universo.

Tun, M. (2014). Yupana. In *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures* (pp. 1-9). Springer Netherlands.

Urton, G. (2005). *Signos del Khipu Inka: Código Binario*. Cusco: Centro de Estudios Regionales Andinos, Bartolomé de las Casas.

Wassen, H. (1931). The Ancient Peruvian Abacus. In E. Nordenskiöld (ed.).*Comparative ethonolographical studies*, (pp. 189-205). vol. 9. Gotemburgo.